



INTRODUCCIÓN A LA HIDRODINÁMICA DEL KAYAK

Alberto Fernández de las Nieves

Club Náutico Universidad de Granada. Mayo, 1996

INTRODUCCIÓN

Mirando atrás en el tiempo, vemos la necesidad del hombre de desplazarse a través del agua, lo que hace cada vez sobre embarcaciones más modernas y complejas. La piragua ha sido un medio acuático de transporte utilizado a lo largo de la historia, en sus dos formas posibles: la canoa y el kayak.

La primera, es una embarcación de transporte abierta, utilizada en Canadá por los pueblos primitivos para cubrir grandes distancias con mercancías o para llevar el correo. En sus orígenes, este tipo de embarcaciones se construían a base de troncos huecos de árboles o pieles de animales previamente tratadas.

El kayak, de origen esquimal, fue fundamentalmente utilizada para cazar y pescar. En ella, el tripulante va sentado, avanza con una pala de doble hoja y dirige el rumbo de la embarcación con un timón que maneja con los pies.

El desarrollo de la piragua hasta nuestros días se ha llevado a cabo a través de diversas líneas de trabajo, orientadas principalmente a una mejora de la embarcación y del remo (diseño, material...), así como a intentar adecuar estos avances a las cualidades de cada palista. El escenario en el que tiene lugar su práctica (pantano, mar, río...) diferencia unas embarcaciones de otras, no solo en los materiales que la conforman, sino también en su diseño.

Al margen de este carácter de competición, que posee como deporte que es, el piragüismo es practicado por muchas personas como un deporte divertido, apasionante y que puede desarrollarse en el entorno natural, causando un daño mínimo.

Es importante hacer notar, la diferencia que se presenta con el remo. En primer lugar la colocación del palista respecto al sentido de avance, de frente en piragüismo y de espaldas en remo, y en segundo lugar, y que es más importante, la manera de impulsar la embarcación: el piragüista no apoya la pala en la piragua, mientras que en remo sí que hay un punto de apoyo sobre el barco.

Mencionar en este punto que la idea del presente trabajo surge a partir de la posibilidad de explicar, con mayor o menor profundidad, con los conocimientos de Física de los Medios Continuos, y en concreto de Física de Fluidos, adquiridos, un sistema real, que uno ve, trata de analizar y sobre el que se hace preguntas de muy diversa índole. En virtud de esto, se tratarán de explicar algunos aspectos hidrodinámicos del kayak, con una rigurosidad restringida a la bibliografía existente y a los conocimientos adquiridos. También creo necesario resaltar que lo que aquí se desarrollará hace uso del trabajo de diversos autores, y que sólo algunos cálculos y estimaciones son personales. Por esto, aunque en algún momento pudiese dar la impresión de ser el que escribe el creador de lo que se dice, lo que trataré de evitarse, ya de antemano quiero dejar claro que no es así.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

En piragüismo, el barco es impulsado a través del agua mediante el paleo. Ambos, el palista y la embarcación, están sujetos a fuerzas internas y externas en un espacio tridimensional, en el que conviene establecer ciertos sistemas de referencia. Para la descripción de la posición anatómica se utilizan tres planos y tres ejes, correspondientes a las tres dimensiones del espacio (figura 1). Estos son los planos frontal, sagital y transversal, y los ejes vertical, sagital y lateral. La intersección de los tres ejes, mutuamente perpendiculares, tiene lugar en el centro de gravedad del palista. La representación de los planos y ejes del sistema palista-embarcación, hay que formarla a partir de la embarcación y de su situación en el agua (figura 2). Aparecen así:

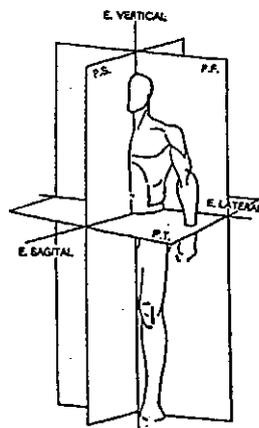


FIG. 1.—Representación de los tres planos, frontal, sagital y transversal, y los tres ejes, vertical, lateral, sagital, del palista a partir de la posición anatómica.

* Plano longitudinal: es ver-

tical y atraviesa la embarcación de adelante a atrás, dividiéndola en dos mitades, izquierda y derecha.

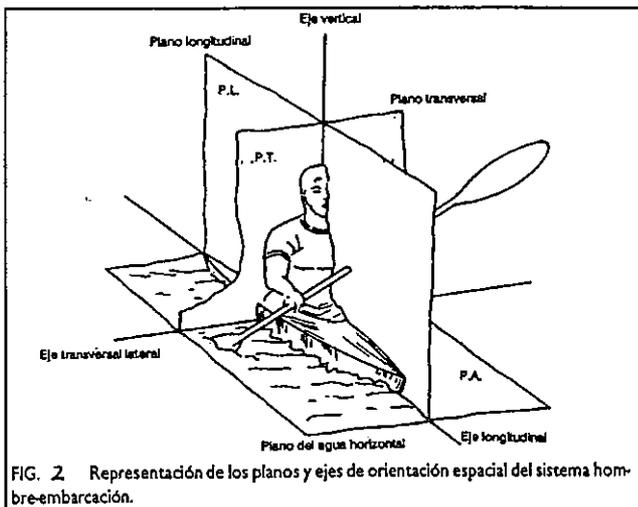


FIG. 2 Representación de los planos y ejes de orientación espacial del sistema hombre-embarcación.

* Plano transversal: es vertical también, y atraviesa lateralmente a la embarcación.

* Plano del agua: es el plano que forma el agua, y se corresponde con la horizontal; divide al sistema en dos partes, la parte sumergida de la embarcación y la parte aérea formada por ésta y el palista.

* Eje longitudinal: es horizontal y atraviesa la embarcación de proa a popa.

* Eje vertical: es perpendicular al agua y atraviesa al palista de arriba a abajo.

* Eje lateral o transversal: es horizontal y atraviesa a la embarcación lateralmente.

Es interesante también definir algunos términos y parámetros que facilitarán el estudio hidrodinámico de nuestro sistema. Podemos destacar, por ejemplo:

* LOA ('length over all'): es la distancia entre la proa y la popa, medida fuera del casco de la embarcación (figura 3).

* B ('beam'): distancia transversal mayor, medida fuera del casco.

* D ('draft'): distancia vertical entre la parte baja y alta de la embarcación. Lo notaremos con la letra D.

* LWL ('length on waterline'): es una distancia longitudinal medida desde la proa a la popa pero a lo largo del plano del agua (figura 3).

* BWL ('waterline beam'): distancia transversal mayor medida a lo largo del plano del agua (figura 3).

* DWL ('waterline draft'): distancia vertical entre el plano del agua y la parte baja del barco. Puede ser medida en la proa, la popa o en la mitad de la embarcación (figura 3).

* DISP ('displacement'): es el volumen o masa de fluido desalojado.

* DLR ('displacement ratio'): es el cociente entre la masa de fluido desalojado por el sistema y su longi-

tud. Proporciona una idea del peso que lleva el barco en función de como de largo es éste. Se usa para predecir la potencia de propulsión necesaria para desplazar el barco.

* CB ('block coefficient'): es el cociente entre el volumen de fluido desalojado y el área rectangular $BWL \cdot DWL$. Es una buena medida de la carga del barco.

* CM ('midship section coefficient'): cociente entre el área máxima sumergida y el producto $BWL \cdot DWL$.

* CP ('prismatic coefficient'): es una medida de la distribución longitudinal del volumen de fluido desalojado. Se calcula mediante la división de este volumen y el producto del área transversal sumergida mayor y LWL. Es una versión algo más definida del coeficiente CB.

* CWP ('waterplane coefficient'): cociente entre el área de agua que corta a la embarcación y el área del rectángulo de lados LWL y BWL.

* SLR ('speed-length ratio'): es el cociente entre la velocidad del barco y la raíz cuadrada de LWL.

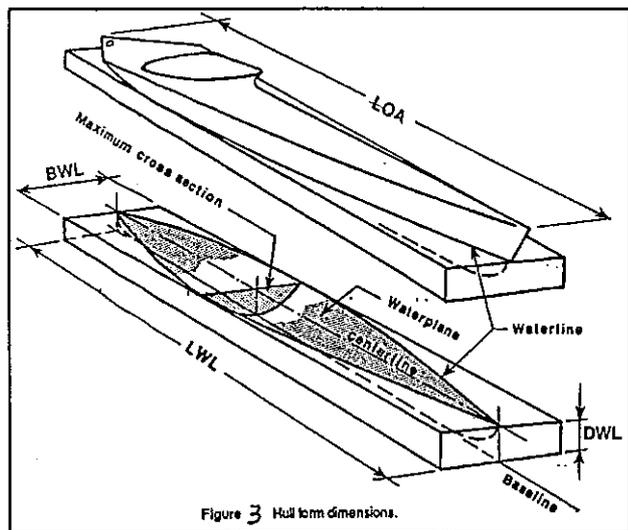


Figure 3 Hull form dimensions.

No todas las definiciones anteriores serán utilizadas en este trabajo, pero su existencia nos da idea de la posible profundidad con la que se han podido estudiar algunos aspectos del piragüismo. La tabla 1 resume estos parámetros para kayaks y canoas olímpicas, con uno o más tripulantes de peso medio.

ESTABILIDAD

El diseño del barco, y en concreto la dimensión mayor de éste en la dirección transversal, BWL, es la parte fundamental para una buena estabilidad. Una mayor BWL para una determinada longitud y cantidad de fluido desalojado, se invierte en una mayor estabilidad para el barco. En el caso de kayaks y canoas, la destreza del palista es también un factor determinante. El estudio de la estabilidad del sistema completo barco-palista, consiste en analizar como se supera o no, la tendencia a volcar en la dirección transversal, alrededor del eje longitudinal.

Se definen tres tipos de estabilidad transversal, en base a la posición del metacentro respecto al centro de gravedad (c.g.) del sistema:

Tabla 1 Parámetros para barcos Olímpicos

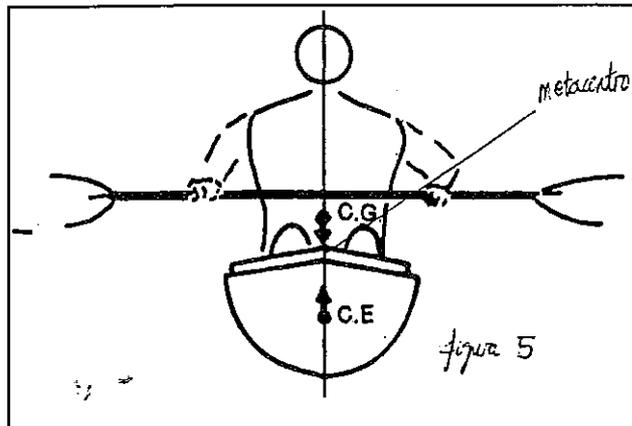
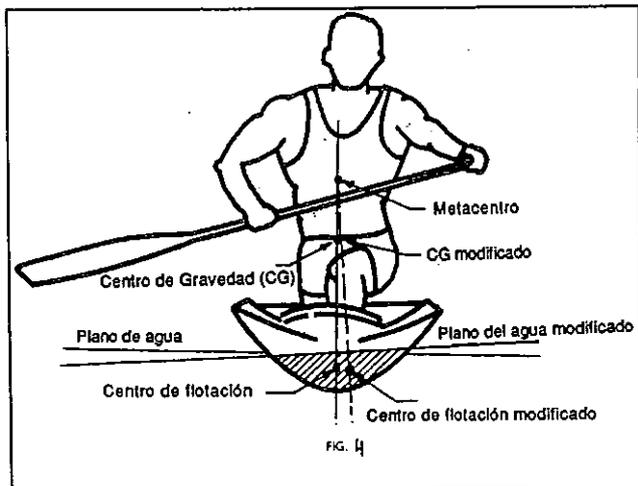
	K-1	K-2	K-4	C-1	C-2
Long. (LWL) m	5.20	6.50	11.00	5.20	6.50
ft	17.06	21.33	36.09	17.06	21.09
Beam (BWL) m	0.38	0.42	0.45	0.45	0.51
ft	1.25	1.50	1.50	1.50	1.67
Draft (DWL) m	0.13	0.14	0.15	0.12	0.14
ft	0.43	0.46	0.49	0.39	0.46
Desplaza. m³	0.10	0.18	0.36	0.10	0.18
ft³	3.60	6.34	12.72	3.60	6.34
Velocidad m/sec	5.08	5.61	5.81	4.62	5.04
ft/sec	16.66	18.40	19.05	15.15	16.55
nudos	9.86	10.89	11.27	8.97	9.79
LWUBWL	13.68	16.25	27.50	13.00	15.48
BWL/DWL	2.92	3.00	3.00	3.75	3.65
Despl.-Long Ratio	21.00	18.70	7.70	21.00	18.70
Veloci-Long Ratio	2.39	2.35	1.87	2.17	2.13
Froude Number	0.71	0.70	0.55	0.65	0.63
Prismat.Coeff. (CP)	0.60	0.58	0.56	0.60	0.60
Block Coeff. (CB)	0.45	0.44	0.42	0.45	0.45
Sección Coef. (CM)	0.75	0.75	0.75	0.78	0.78

Los Parámetros son para modelos de barcos actuales con palistas de un peso medio.

- * Estabilidad positiva: el metacentro se encuentra encima del c.g.
- * Estabilidad negativa: el metacentro está debajo del c.g.
- * Estabilidad indiferente o neutra: ambos puntos coinciden.

Examinaremos a continuación los factores que influyen en la estabilidad transversal de una piragua en equilibrio. La sensación de inclinación o de inestabilidad, se refiere a la localización relativa de los dos puntos mencionados arriba (figuras 4 y 5).

Otro punto importante en el estudio de la estabilidad,



es el centro de flotación (c.f.), sobre el que se considera que actúa la fuerza de flotación. Se define como el centroide del volumen de fluido desalojado y siempre se encuentra en el área de sección transversal bajo la superficie líquida.

Mientras el c.g. y el c.f. permanezcan sobre una misma línea vertical, el conjunto estará en equilibrio. Sin embargo, esto es difícil de conseguir en kayaks y mucho más en canoas, ya que cualquier movimiento del cuerpo romperá ese alineamiento; el sistema entonces, rotará hasta encontrar una nueva posición o volverá a su posición inicial, siendo el papel del palista crucial en la consecución de una u otra cosa. Conviene indicar que el sistema palista-embarcación es un sistema elástico, no rígido por tanto, donde la estabilidad se consigue por la interacción de las dos partes. En este sentido, el movimiento del conjunto, en caso de que este fuese a volver a su posición de equilibrio, no sería periódico, pues el tripulante tiene capacidad para reaccionar y maniobrar en busca de ese equilibrio de una forma más rápida.

Para la determinación de la altura metacéntrica, puede desarrollarse una expresión válida para ángulos de rotación pequeños. Nos referiremos a la figura 6 a lo largo del desarrollo.

El corrimiento aproximadamente horizontal del centro de flotación, r , se determina por el cambio en las fuerza de flotación ($F_B = D p g$; p es la densidad del fluido) a la cuña que se sumerge y a la que sale del agua, que originan unas fuerzas hacia arriba a la izquierda y hacia abajo a la derecha, respectivamente. El sistema de fuerzas, que consta de la fuerza de flotación original en B y del par ΔF_B debido a las cuñas, debe tener como resultante la fuerza de flotación en B' . Tomando momentos respecto a B :

$$\Delta F_B S = p g D r (1)$$

con D el volumen de fluido desalojado.

Para un elemento de área dA en la sección horizontal (plano del agua), un elemento de volumen de la cuña será:

$$dA \text{ y } \text{sen } \theta \approx y \theta dA \quad (2)$$

con θ el ángulo pequeño de ladeo, en radianes.

La fuerza de flotación debida a este elemento es entonces:

$$p g y \theta dA \quad (3)$$

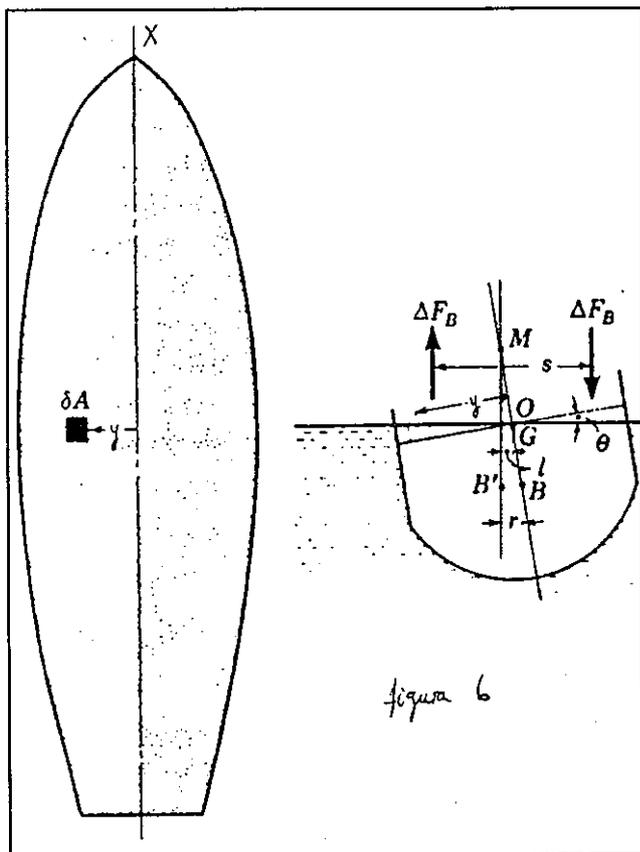


figura 6

y su momento respecto a O será:

$$p g \theta y^2 dA \quad (4)$$

Si integramos sobre el área horizontal de la embarcación en la superficie del líquido, tendremos el momento total debido al par ΔF_B , es decir:

$$\Delta F_B = p g \theta \int_A y^2 dA = p g \theta I \quad (5)$$

donde I es el momento de inercia por unidad de masa del área A respecto al eje longitudinal.

Sustituyendo (5) en (1):

$$p g \theta I = p g D r \quad (6)$$

$$\theta I = D r \quad (7)$$

La altura metacéntrica, que como sabemos es la distancia entre el metacentro y el c.g., se obtendrá a partir de:

$$MG = MB \pm GB \quad (8)$$

$$MB = \frac{r}{\text{sen } \theta} \approx \frac{r}{\theta} \approx \frac{I}{D} \quad (9)$$

como:

$$MG \approx \frac{I}{D} \pm \quad (10)$$

donde el signo menos se usa si G (c.g.) está encima de B (c.f.), y el signo mas si ocurre lo contrario.

Las dos variables que aparecen en la ecuación (10) dependen fuertemente de la forma del área horizontal de agua que intersecta con el barco, y del peso del palista. Un palista más pesado produce una bajada de la embarcación, cambiando el área de corte y por tanto variando la altura metacéntrica.

En consecuencia, si se conoce el área de corte entre la embarcación y el plano del agua, puede calcularse su momento de inercia respecto al eje longitudinal, pudiendo con su valor, obtener la posición del metacentro respecto al centro de flotación, y conocida la posición de este último respecto al c.g., se podrá determinar la altura metacéntrica. Suponiendo que la parte sumergida de un kayak es un elipsoide (la mitad de éste) y que el tripulante son dos prismas de base rectangular, uno para el tronco y otro para las piernas, se a obtenido en el apéndice 1 el valor de la altura metacéntrica.

A continuación, conviene analizar en base a la posición del metacentro respecto al c.g. del sistema, si se está bajo condiciones de estabilidad positiva o negativa.

Consideremos en primer lugar que el metacentro está debajo del c.g. Partimos de la posición de equilibrio (c.g. alineado verticalmente con el c.f.) y perturbamos hacia un lado, alrededor del eje longitudinal. Es claro que el par de fuerzas que aparece, una sobre el c.g. (peso), hacia abajo, y otra sobre el c.f. (empuje), hacia arriba, es tal que la perturbación se ve incrementada, produciendo que el sistema vuelque. Tenemos estabilidad negativa en este caso y la posición de equilibrio es inestable. Este es el caso del kayak (figura 5). La estabilidad es baja, pero se reduce la resistencia al avance, que se considera preferente respecto a la estabilidad. No obstante, existen muchos diseños de kayaks, más, y menos estables, en función de su utilidad y de lo especializado que sea el palista.

Próximo Capítulo:

INTRODUCCIÓN A LA HIDRODINÁMICA DEL KAYAK (Continuará)

Si ahora consideramos lo contrario, el par de fuerzas será siempre recuperador pues el cambio en la posición del c.g. es mayor que el cambio que experimenta el c.f., que para ángulos pequeños es prácticamente nulo. La estabilidad será positiva y la posición de equilibrio de la que partíamos es estable. La aparición de un ángulo crítico por encima del cual el barco vuelca se debe a consideraciones de otra índole y no a criterios de estabilidad. En la canoa la estabilidad es bastante mayor que en el kayak, lo que es importante debido, fundamentalmente, a la gran distancia que hay entre en el c.g. y el c.f. (figura 4). Si no fuese así, el equilibrio en canoas sería muy inestable, teniendo que prestar mucha atención a su mantenimiento. Imagino que la sensación de inestabilidad, también en este caso, dependerá del diseño del barco y de la pericia del que lo maneja, factores que son bastante variables.

En ambas situaciones el par de fuerzas que se genera, que en un caso incrementa la perturbación y en otro la reduce, tiene la misma expresión, pero sentidos contrarios, y vale:

$$\text{distancia (met -c.g.)} \cdot \text{peso} \cdot \text{sen} (\text{ángulo de ladeo}) \quad (11)$$

La estabilidad indiferente se refiere a la coincidencia del c.g. y el metacentro. Claramente, la posición de equilibrio de la que se parte es neutra, pues ni el c.g. ni el c.f. experimentan cambios.

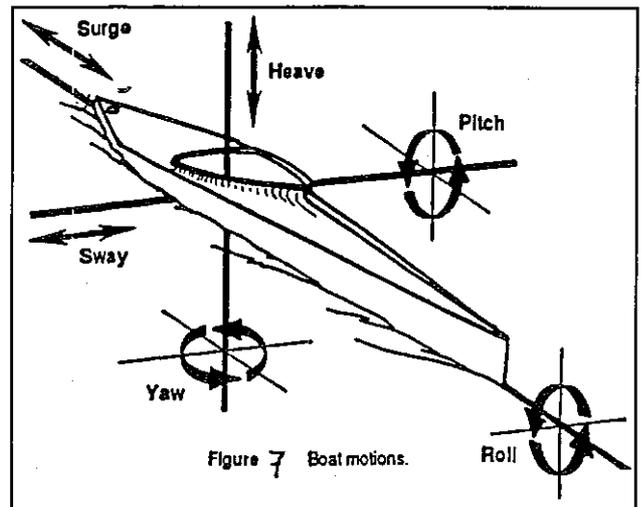
Concluimos el presente apartado, citando condiciones de carácter interno y externo que pueden alterar la estabilidad del sistema barco-palista:

* Condicionantes internos: aparte de la superficie corporal, peso corporal, altura y de la colocación de los apoyos, la técnica de paleo genera desequilibrios voluntarios para un mejor aprovechamiento de inercias corporales, más importantes en el caso de la canoa. La falta de control en el caso de los principiantes, hace que se adopten posiciones de seguridad aumentando la superficie de contacto de la embarcación con el agua; para ello giran el barco sobre un lateral y se incrementa notablemente la superficie de contacto con el agua. De esta manera los neófitos se mantienen más tiempo sobre el barco, aunque las condiciones para el paleo no son adecuadas.

* Condicionantes externos: son fundamentalmente el viento, las olas y las corrientes los agentes externos que alteran la estabilidad del sistema (según su dirección de incidencia, fuerza con que actúen sobre la embarcación...), bien porque provocan movimientos laterales en el barco o bien porque provocan movimientos al palista. En todos los casos, es el entrenamiento de la adaptabilidad de la técnica y el desarrollo de la habilidad específica, lo que permite a los palistas superar mejor estas circunstancias. Además, la influencia del agua libre dentro de los barcos afecta también apreciablemente a la estabilidad del sistema, ejerciendo una acción de freno, como consecuencia del desplazamiento de proa a popa en sentido contrario al movimiento de la embarcación.

MOVIMIENTOS ASOCIADOS A LA EMBARCACIÓN. RESISTENCIA

Una piragua moviéndose sobre el agua, está sujeta a seis tipos de movimiento, que se presentan en determinados momentos de manera oscilatoria. Actúan entorno a los tres ejes definidos para el sistema barco-palista. Tres, son lineales y otros tres de rotación (figura 7).



* Movimiento de avance-retroceso ('surge'): se desarrolla hacia delante o hacia atrás en la dirección del eje longitudinal. El barco avanza gracias al impulso de la pala en el agua; la realización es más efectiva cuando la pala mantiene un ángulo de $\frac{1}{2}$ radianes con respecto al plano del agua, pues en ese caso la resultante producida coincide con la dirección de avance o de retroceso según rememos hacia delante o hacia atrás.

* Movimiento de deslizamiento lateral ('sway'): se trata de movimientos laterales lineales en la dirección perpendicular al desplazamiento, según el eje transversal. Es bastante más apreciable en canoas que en kayaks y se produce fundamentalmente por la acción lateral del viento.

* Movimiento de elevación-descenso ('heave'): se producen a lo largo del eje vertical, son involuntarios y normalmente van asociados al movimiento que el palista realiza al introducir y al sacar el remo del agua; originan variaciones en la altura del centro de gravedad, que son más observables en canoa. Defectos graves en la ejecución de la técnica del paleo y el aumento de velocidad pueden traer consigo un hundimiento de la embarcación o una elevación global de ésta, respectivamente.

* Movimiento de giro a derecha-izquierda ('yaw'): son movimientos circulares que se producen al rotar la embarcación sobre su eje vertical, y que traen como consecuencia un cambio en la orientación de la navegación hacia la izquierda o la derecha (figura 8).

El palista de forma voluntaria provoca estos movimientos para cambiar el rumbo establecido o para recuperarlo, a través de giros (virajes) ligeros o amplios. Los virajes ligeros se producen siguiendo un paleo normal, añadiendo una o dos paladas mas separadas de la embarcación y por el lado contrario al que se desea girar. En el caso de virajes mas amplios, las paladas se separan más del barco aumentando el momento del movimiento, y se mantienen hasta que se consigue el definitivo rumbo. No siempre la importancia de la maniobra está directamente relacionada con el cambio de rumbo; en la canoa, en ocasiones, la influencia del viento provoca la pérdida del rumbo hacia un lado u otro; entonces la maniobra puede ser muy fuerte y durante mucho tiempo según la fuerza del viento, y solamente con el objetivo de recuperar o mantener el rumbo deseado.

* **Movimiento de balanceo ('roll')**: son movimientos de rotación alrededor del eje longitudinal, debido a los cuales el barco se inclina sobre un lateral u otro alternativamente, o solamente sobre uno. En el primer caso, suelen ser movimientos involuntarios al estar desequilibrado el palista por circunstancias adversas a la navegación o por falta de pericia. Cuando la inclinación es hacia un solo lado, suele ser provocada de forma voluntaria por el palista cargando su peso sobre la banda del barco que quiere inclinar; de esta forma, se modifica la superficie del barco en contacto con el agua, aumentando la estabilidad cuando se está en reposo y las posibilidades de giro cuando el barco está en movimiento. Negativamente, el aumento de dicha área representa un freno importante en la navegación de velocidad.

* **Movimiento de cabeceo ('pitch')**: es un movimiento angular entorno al eje transversal, durante el cual la proa y la popa del barco se mueven alternativamente arriba y abajo; se genera involuntariamente y frenan el deslizamiento del barco durante la navegación. Son dos las causas de su aparición:

- La primera tiene que ver con la dirección de aplicación del impulso en el agua.

- La segunda está relacionada con el desplazamiento del peso del palista adelante y después abajo, que provoca el hundimiento de la proa y la elevación de la popa. Estos movimientos en la proa son muy habituales, reduciéndose algo en piragüistas muy expertos al conseguir estos que la componente de avance sea bastante importante, suavizándose en consecuencia, el movimiento de cabeceo.

Todos los movimientos descritos no son independientes unos de otros, y normalmente se producen a la vez, siendo uno de ellos el principal y apareciendo los demás en torno a éste. Representan siempre una modificación de la superficie de rozamiento ideal del barco sobre el agua, reduciendo sus posibilidades náuticas o aumentando incluso la distancia a recorrer (figura 9).



FIG. 8 Movimientos de giro o viraje.

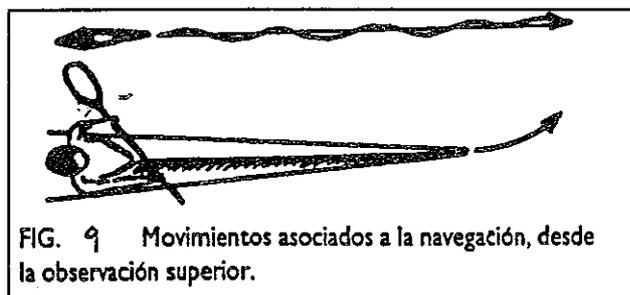


FIG. 9 Movimientos asociados a la navegación, desde la observación superior.

La alteración de la superficie del agua en contacto con la embarcación o de las fuerzas que actúan sobre ésta o sobre el palista modifican la navegación normal. Los agentes externos más influyentes en la navegación son tres: las olas, el viento y las corrientes.

* **Las olas**: en general, producen estos movimientos asociados a modificar la superficie donde se sumerge el barco, a la vez que actúan sobre el equilibrio del palista. Según su magnitud, producen movimientos de giro, cabeceo y bandeo, elevación y descenso, desplazamientos laterales y freno o empuje, en función del sentido de la ola, el tamaño y el punto de aplicación sobre la embarcación. La pericia del palista en este medio hace que los efectos se reduzcan, pero nunca se eliminan totalmente. Cuando el palista posee un adecuado control del equilibrio y de la embarcación, puede adaptarse con mayor facilidad a esta circunstancia.

* **Las corrientes**: se dan fundamentalmente en pruebas de larga distancia, que se realizan en ríos. Básicamente, en función de la dirección con la que actúen sobre el barco, lo frenarán o empujarán, y si son laterales, provocarán una pérdida de rumbo, según el punto de aplicación, así como un desplazamiento lateral. Si el palista se desequilibra, pueden aparecer balanceos.

* **El viento**: su importancia es mayor que la de los otros dos ya descritos, por su habitualidad, y puede delimitar la efectividad de unos deportistas frente a otros de las mismas características técnicas. El viento frontal actúa como freno del sistema palista-embarcación y ralentiza el ritmo y la frecuencia del paleo. Los palistas de gran envergadura y poco peso se verán más perjudicados. El viento dorsal actúa, en principio, ayudando al palista, pues empuja el sistema y permite una frecuencia de paleo más alta, y el viento lateral, obliga al palista en su movimiento de avance a corregir la dirección.

En la tabla 2 se muestra como más del 83% del total del volumen de fluido que desaloja el sistema embarcación-palista es debido al segundo. En consecuencia, prácticamente todo el peso es controlado por éste, y su inercia afecta definitivamente al movimiento del barco. Las variaciones de posición del peso del tripulante, así como su maestría en la ejecución de la técnica de paleo, serán por tanto, vitales para una buena o mala navegación.

Tabla 2. Pesos

	Peso Piragua		Peso Equipo		Total		%
	Kg	Lib.	Kg	Lib.	Kg	Lib.	
Mujeres							
K-1	12	26.46	65	143	77	170	84
K-2	18	39.68	128	282	146	322	88
K-4	30	66.24	256	564	286	632	90
Hombres							
K-1	12	26.46	80	176	92	203	87
K-2	18	36.68	158	348	176	388	90
K-4	30	66.14	324	715	354	780	92
C-1	16	35.27	80	176	98	212	83
C-2	20	44.09	156	344	176	388	89

Los pesos de los equipos son medias de palistas olímpicos.

A continuación, nos centraremos en el movimiento de avance, que sin duda es el más común y el más estudiado de todos. Para abordar este problema, son necesarios ciertos conocimientos de análisis dimensional y de la teoría de la capa límite, que se presentan en los apéndices 2 y 3. La resistencia que el barco experimenta al movimiento se estudiará también con bastante detalle, para lo que la comprensión de los mencionados apéndices será fundamental.

4.1 Resistencia al avance y teoría de la capa límite

Siempre que hay movimiento relativo entre un cuerpo sólido y el fluido en el que está sumergido (o parcialmente sumergido), el cuerpo experimenta una fuerza neta debida a la acción del fluido. Esta fuerza, en general, será la resultante de una serie de fuerzas de presión y de corte. Las primeras son perpendiculares a la dirección de movimiento; las segundas son paralelas a esta dirección, siendo las causantes de la resistencia real que el fluido ofrece al desplazamiento del barco. En nuestro caso se debería considerar la resistencia aerodinámica debida al aire, que en determinadas circunstancias adquiere una importancia notable. Sin embargo, en la mayoría de los casos normales, el valor de esta resistencia es despreciable frente a la que ofrece el agua y, por tanto, no suele considerarse. En nuestro estudio, no la tendremos en cuenta.

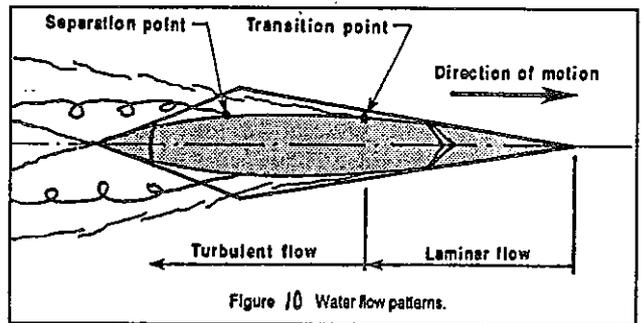
Distinguiremos dos tipos de resistencia, ambas debidas al contacto entre el barco y el agua: la resistencia de fricción o viscosa y la llamada resistencia residual,

que en el caso de la piragua está formada fundamentalmente por el oleaje que esta genera al moverse en el agua.

4.1.1 Resistencia viscosa

Para entender la resistencia debida a la viscosidad, debemos observar microscópicamente la interfase entre el agua y el casco de la embarcación. La calidad de la superficie de ésta, será fundamental en cuanto a la magnitud de este tipo de resistencia. Su aparición se debe a la viscosidad del agua, que será importante mientras estemos dentro de la capa límite que rodea al barco (figura 10).

El kayak presenta una anchura máxima a lo largo de su sección transversal, zona que normalmente está situada detrás de la mitad del kayak (en mayor o menor medida) según vamos de proa a popa. Su diseño es tal que en estos dos últimos puntos, la presión es mayor que en el resto del casco del barco. En relación a la distribución de presión a lo largo de la embarcación, aparece la resistencia del oleaje (que será tratada más tarde), afectando también a la resistencia de fricción.



Según nos movemos desde la proa hacia la popa, lo hacemos según un gradiente de presión favorable, que impide la aparición de la separación. A lo largo de este tramo del barco tendremos al principio un flujo en régimen laminar y posteriormente un flujo en régimen turbulento o no, dependiendo de la velocidad del barco, de la superficie mojada y de la geometría del casco de la embarcación. Sin embargo, desde este punto de máxima anchura hasta la popa, el gradiente de presión es adverso, produciéndose separación casi con seguridad, dependiendo de cómo de grande sea esa variación de la presión a lo largo del barco. En esta zona normalmente, el flujo está en régimen turbulento y hay separación.

Para una capa límite con un flujo en régimen laminar, las pérdidas por viscosidad son las menores posibles, siendo éstas mayores en la zona en la que se esté en régimen turbulento y aún mayores a partir del punto de separación. Esto es una de las causas por las que el diseño del kayak busca que los puntos de presión mayor sean la popa y la proa del mismo, a parte de otras ventajas que se especificarán cuando veamos la resistencia al oleaje.

Entonces, se intenta que la separación se produzca mas cerca de la popa como sea posible, con el fin de mantener un régimen laminar, que en algún punto se hará turbulento, a lo largo de la mayor parte de la embarcación como se pueda.

Veamos ahora la obtención del arrastre de fricción (fuerza total de corte) ejercido por el fluido sobre una placa plana de dimensiones $L \cdot b$ y a velocidad v , para un flujo en régimen laminar primero y en régimen turbulento después; en ambos casos, sin gradiente de presión.

En primer lugar definimos el coeficiente de arrastre de fricción como:

$$C_a = \frac{F_a}{\frac{1}{2} \rho v^2 S} = \frac{\int_0^L \tau_w dx}{\frac{1}{2} \rho v^2 S} \quad (12)$$

donde F_a es la fuerza de arrastre y S el área mojada.

El procedimiento es análogo para ambos regímenes pues conocemos el esfuerzo de corte para una placa plana tanto en un régimen como en otro.

Para un flujo en régimen laminar:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho v^2} \quad (13)$$

y entonces:

$$C_a = \frac{1}{S} \int C_f dS = \int_0^L 0.664 \sqrt{R(x)} b dx = \frac{1.328}{\sqrt{R(x)}} \quad (14)$$

Para un flujo en régimen turbulento:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho v^2} \quad (15)$$

por tanto:

$$C_a = \frac{1}{S} \int \tau_w dS = \frac{0.074}{[R(x)]^{1/2}} \quad (16)$$

que será válida para $5 \cdot 10^5 < R(L) < 10^7$. Para $R(L) < 10^5$, la ecuación empírica dada por Schlichting,

$$C_a = \frac{0.455}{[\log R(L)]^{2.58}} \quad (17)$$

ajusta muy bien los datos experimentales.

En el caso de una capa límite que está inicialmente en régimen laminar y que experimenta en algún punto, una transición a régimen turbulento, el coefi-

ciente de arrastre turbulento debe ajustarse para dar cuenta del flujo laminar sobre la longitud inicial. El ajuste se realiza restando la cantidad $B/R(L)$ de C_a determinado para flujo en régimen turbulento. El valor de B depende del número de Reynolds en la transición y está dado por:

$$B = R(\text{transición}) \cdot [C_a(\text{turb}) - C_a(\text{lam})] \quad (18)$$

El número de Reynolds en el cual ocurre la transición depende de una combinación de factores, tales como la rugosidad de la superficie y las perturbaciones de la corriente libre. La transición tiende a ocurrir más temprano cuando aumenta la rugosidad de la superficie o la turbulencia de la corriente.

Con el fin de cuantificar un poco las cosas, vamos a calcular el arrastre de fricción sobre el kayak, considerándolo como una placa plana (la parte sumergida) no sometida a gradiente de presión, de dimensiones que razonamos a continuación, en base a que el volumen sumergido de un K-1 es 0.1 m^3 (tabla 1). Mantendremos la dimensión longitudinal del kayak, LWL , para la placa y tomaremos su anchura como:

$$K \cdot LWL + 2 \cdot DWL \quad (19)$$

donde K es tal que hace coincidir el producto de LWL , DWL y $K \cdot LWL$, con el volumen de kayak sumergido. Haciendo uso de la tabla 1, encontramos que la anchura de placa plana que tomamos es de aproximadamente 0.41 m .

Por tanto, nuestra placa es de dimensiones: $5.2 \cdot 0.41 \text{ m}^2$

Esto puede parecer demasiado 'bruto', sin embargo en [1] encontramos algo similar para el caso de un buque tanque.

El número de Reynolds crítico lo tomamos de valor típico igual a $5 \cdot 10^5$ ([1]), y consideramos que el kayak va a una velocidad de 5 m/s .

Entonces, si tomamos la densidad y la viscosidad del agua para una temperatura de 20°C ,

$$\rho(\text{agua}) = 0.9981 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\eta(\text{agua}) = 1002 \mu\text{Pa}\cdot\text{s}$$

Próximo Capítulo:

INTRODUCCIÓN A LA HIDRODINÁMICA DEL KAYAK (Continuará)

(valores dados en [6]) podemos obtener con las ecuaciones anteriores que:

$$R(L) = 2.59 \cdot 10^7$$

$$C_a (\text{lám}) = 2.61 \cdot 10^{-4}$$

$$C_a (\text{turb; Schl}) = 2.59 \cdot 10^{-3}$$

$$B = 1164.5$$

$$C_a (\text{total}) = 2.54 \cdot 10^{-3}$$

$$F_a (\text{total}) = 67.57 \text{ N}$$

Andy Toro ([3]) presenta una curva de resistencia total frente a velocidad (que mas adelante comentaremos). En ella para una velocidad de **5 m/s** y con las dimensiones características que hemos empleado para el kayak, obtiene que el arrastre total es de unos **78 N**. Además, él considera que de esa resistencia el **75 u 80** por ciento es debida a la viscosidad. En consecuencia, según este autor, el arrastre por fricción es de unos **63 N**.

La concordancia entre este valor y el obtenido con nuestras simplificaciones, creo que es bastante buena. El conjunto de consideraciones o aproximaciones que se han realizado para llegar al valor presentado pueden resumirse en:

- 1) No haber tenido en cuenta el gradiente de presión a lo largo del casco.
- 2) Haber aproximado el kayak a una placa plana.
- 3) Haber considerado un perfil de velocidades concreto y no otro en el cálculo del coeficiente de arrastre laminar.
- 4) Considerar que el número de Reynolds crítico es igual a 5 105.
- 5) No conocer el valor de la temperatura del agua, para el que el valor de la resistencia total de la bibliografía se obtuvo o se midió.

La aproximación dos, no es demasiado burda pues la elección de las dimensiones de la placa son tales que el área que se considera en contacto con el agua es aproximadamente igual que la real, aunque su forma sea muy diferente. En consecuencia, y según la concordancia obtenida, es la primera variable la que más afecta al arrastre por fricción respecto a la segunda. De aquí los múltiples diseños para el casco del kayak que existen, buscando, cuando el enfoque es la competición, que el área de corte con el agua sea el menor posible.

La primera aproximación es importante y no se ajusta, en absoluto, a la realidad. Estamos eliminando la posibilidad de separación y en consecuencia se está teniendo en cuenta menos resistencia de la real, en contra de lo obtenido, que indica lo contrario. Esto

pone en duda la aproximación de placa plana, que pese a dar una buena estimación, no deja de ser una gran simplificación del problema. En base a esto, la forma de la superficie de corte entre el kayak y el agua debe también influir considerablemente en esta antítesis de que nuestro cálculo sea mayor que el valor real cuando por la aproximación uno, debería de ser al revés. El por qué se supone que no hay gradiente de presión, se debe a que no existe (o no se ha encontrado) desarrollo teórico para problemas de capa límite con gradientes de presión.

El perfil de velocidades tomado para el cálculo de C_A influirá en el resultado apreciablemente si en la capa límite del kayak el flujo estuviese en régimen laminar a lo largo de todo el barco. Sin embargo, pues existe una gran longitud de la embarcación para la que el flujo está en régimen turbulento, y el arrastre es para este régimen predominante respecto al otro, el haber empleado otro perfil de velocidades no habría afectado al resultado de manera importante.

Respecto a las dos últimas consideraciones, tan solo cabe decir que pueden influir en el resultado, pues la densidad y la viscosidad varían con la temperatura, pero no de forma suficiente como para que nuestro cálculo se hubiese aproximado mucho mas al valor encontrado en [3].

En el apéndice 3 se muestra una tabla comparativa entre valores de resistencia de fricción para velocidades diferentes calculados con la aproximación de placa plana y los correspondientes sacados de [3].

El mismo autor proporciona para el espesor de la capa límite de un K-1 a una velocidad de 5 m/s, los siguientes valores:

- * A 1.5 m de la proa: ~1.9 cm
- * A 2.6 m de la proa: ~3 cm
- * En la popa: ~6.5 cm

Si aproximamos, de nuevo, nuestro kayak a la placa plana anterior, sin consideración de gradiente presión y con un flujo en régimen turbulento para toda la capa límite del barco, obtenemos para el espesor lo siguiente:

- * A 1.5 m de la proa: ~2.4 cm
- * A 2.6 m de la proa: ~4.2 cm
- * A 5.2 m de la proa: ~8.3 cm

Como vemos, estos valores son demasiado grandes, lo que vuelve a poner de manifiesto que la simplificación realizada es excesiva. Si bien para el coeficiente de arrastre las cosas no salían tan mal, ahora la forma del área del kayak que intersecta con el agua parece ser bastante más importante. Es lógico pensar que el kayak tendrá un diseño para que el efecto de la viscosidad sea el menor posible, y por tanto para que la capa límite, que sin remedio se forma entorno al barco, sea de espesor lo más bajo posible. Esto deja claro el por qué de los valores tan altos

obtenidos para la placa plana, pese a que el área total de corte con el agua sea parecida a la del kayak. Esta última variable parece ser muy importante en el valor de la resistencia, pero en el espesor parece influir más la forma de esta superficie. Pese a todo los valores calculados proporcionan una idea mas o menos aproximada de la anchura de la capa límite.

4.1.2 Resistencia al oleaje

La aparición de este tipo de resistencia se debe a la diferencia de presión a lo largo del casco, que aparece cuando la embarcación se desplaza sobre el agua. Como ya hemos dicho, sobre la proa y la popa la presión es mayor que en el resto del kayak (si el diseño es el correcto) y en consecuencia es en estos puntos donde se genera el patrón de olas al que habrá que suministrar energía, que procederá de la fuerza aplicada por el palista. El patrón de olas que se desarrolla en un kayak bien diseñado, llamado de Kelvin, está formado por olas transversales y divergentes (figura 11). Las ecuaciones que nos dan las longitudes de onda para cada tipo de olas son:

$$L_{divergente} = \frac{2\pi v^2}{g} \quad (20)$$

$$L_{transversal} = \frac{2\pi v^2 \cos^2 \beta}{g} \quad (21)$$

en las que vemos la dependencia con la velocidad de la embarcación. Estas expresiones son válidas en aguas profundas, en cuyo caso, la intersección entre las olas transversales y divergentes, forma una recta a partir de la proa y la popa que forman un ángulo de 19º28' ([3]) con el eje longitudinal de la embarcación.

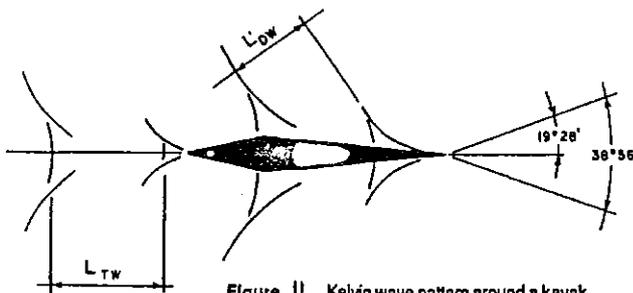


Figure 11 Kelvin wave pattern around a kayak.

En el caso de aguas poco profundas, el patrón de olas es diferente a causa del cambio en la distribución de la presión a lo largo del barco. La variación en las olas debido a un cambio con la profundidad requeriría hacer un estudio de la propagación de olas en aguas poco profundas, que aquí no abordaremos. No obstante, es de interés mencionar que el cambio en el oleaje que la piragua genera al desplazarse en el agua es función de la profundidad y produce un aumento en la resistencia, lo que se aprecia en la práctica notablemente. Esta dependencia entre la resistencia al oleaje y la profundidad se pierde a partir de una velocidad crítica que resulta ser igual a ([3]):

$$v_{critica} = \sqrt{gh} \quad (21)$$

siendo h la profundidad.

Como se infiere de lo anterior, sistemas de oleaje distintos pueden producirse, si a lo largo del kayak aparecen otros punto de presión. Esto no debe de ocurrir en un kayak bien diseñado, pues cualquiera de los patrones de olas generados aportaría una resistencia de mayor magnitud. Añadiremos aquí, que el volumen de fluido desalojado es un factor importante para la resistencia al oleaje, habiendo entre ambos una relación aproximadamente cuadrática ([3]):

$$Resistencia\ al\ oleaje \propto D^2 \quad (23)$$

Sobre este tipo de resistencia, que en piragüismo es la componente fundamental de la llamada resistencia residual, hablaremos más profundamente en el punto siguiente bajo el dominio del análisis dimensional.

4.2 Movimiento y resistencia en el dominio del análisis dimensional

Consideremos el movimiento estacionario, rectilíneo y hacia delante de una embarcación en un fluido incompresible que se encuentra en reposo a una distancia y profundidad suficientemente alejados del barco. El movimiento del cuerpo origina una perturbación en la superficie libre, de carácter ondulatorio y dependiente del efecto de la gravedad (patrón de olas). Hemos de tener en cuenta los efectos de la densidad y la viscosidad del fluido (agua), así como el de la gravedad.

Las dimensiones y la forma del casco de la embarcación jugarán un papel importante en la descripción de las principales características mecánicas. Las dimensiones geométricas se consideran determinadas por la longitud del barco, LWL.

El peso total determina la posición del barco en el agua, lo que influirá en gran medida en la resistencia. Tomaremos como parámetro característico, el volumen de fluido desalojado, que notaremos con la letra D, como venimos haciendo. La velocidad de la embarcación será v.

Nuestro sistema de variables es el siguiente:

$$L, D, , , g, v$$

Mediante el teorema podemos obtener los siguientes monomios adimensionales (ver apéndice 4):

$$\pi_1 = \frac{L}{\sqrt[3]{D}} \equiv \psi \quad (24)$$

$$\pi_2 = \frac{v}{\sqrt{gL}} \equiv F \quad (25)$$

$$\pi_3 = \frac{p v L}{\eta} \equiv R \quad (26)$$

Un tratamiento más general estaría en la consideración también de variables características del aire, pues el movimiento se desarrolla además de a través del agua, por el aire. Al igual que antes, despreciaremos estos efectos, que en condiciones normales lo son frente a los del agua.

La cantidad

$$\frac{W}{\rho S v^2} \quad (27)$$

con W la resistencia total que el agua ofrece al barco y S el área mojada de éste, es adimensional, y por tanto puede ponerse en función de los monomios obtenidos:

$$\frac{W}{\rho S v^2} = f(\psi, F, R) \quad (28)$$

o

$$W = f(\psi, F, R) \rho S v^2 \quad (29)$$

En nuestro caso, los criterios de similitud completa no son satisfechos si para el movimiento del modelo y del prototipo usamos el mismo fluido. Si simulamos nuestro sistema mediante un cambio de escala en longitud, la resistencia para el modelo no será la que realmente se obtendría para el prototipo. No obstante, se podrán considerar resultados experimentales sobre un modelo, si la resistencia se descompone en dos partes (similitud incompleta): una determinada por la viscosidad y la otra relacionada con la gravedad. En este supuesto (basado en condiciones teóricas complicadas según [5]), podemos escribir:

$$W = W_1 + W_2 = C_a(R) \frac{\rho S v^2}{2} + C_r(\psi, R) \rho g D \quad (30)$$

W_1 es la llamada resistencia viscosa (fuerza de arrastre). Su valor se determina para el movimiento del modelo y del prototipo mediante cálculos basados en fórmulas semi-empíricas. El coeficiente C_a , que queda totalmente determinado por el número de Reynolds, depende de la rugosidad del casco del barco, y en mayor o menor grado, también de su forma. Decece conforme R crece y en la práctica suele tomarse igual que el correspondiente a una placa plana ([5]).

W_2 representa la resistencia residual. El coeficiente C_r puede determinarse experimentalmente, ensayando modelos geoméricamente similares, si las condiciones de Froude son satisfechas, es decir, si:

$$(\psi)_m = (\psi)_p ; (F)_m = (F)_p \quad (31)$$

Esta resistencia depende de la geometría del casco de la embarcación, y por tanto, una buena elección de los parámetros geoméricos de ésta es fundamental de cara a unos buenos resultados. La experiencia muestra que la elección de ψ y de F , que determinan el coeficiente C_r es buena para una amplia gama de

contornos de barcos ([5]). Los valores de C_r en función de ψ y de F pueden verse en los llamados gráficos de Doyère (figura 12). En estas curvas se observa como para un número de Froude fijo, la resistencia residual decrece con un aumento de ψ , o equivalentemente con una disminución de la razón entre el volumen de fluido desalojado y LWL . Un valor grande del cociente anterior requerirá de una mayor potencia para alcanzar una misma velocidad. De aquí se deduce la tendencia de algunos fabricantes en construir embarcaciones más largas, a lo que la federación de piragüismo respondió poniendo un máximo para la longitud de la piragua. El cociente entre LWL y BWL influye también en el valor de la resistencia residual, siendo esta influencia menor a menor BWL . Respecto a esto la federación también se pronunció imponiendo un mínimo de anchura para el kayak, a alcanzar en algún punto del casco.

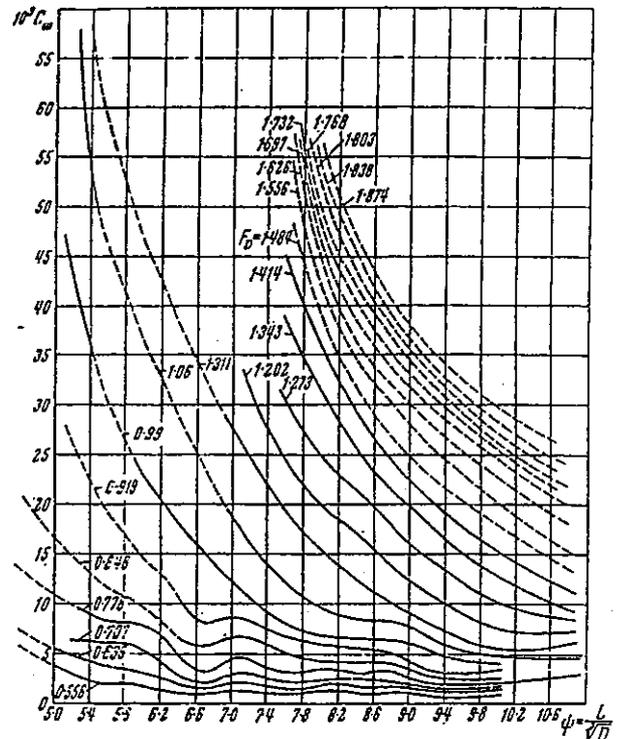


FIG. 12. Residual drag per ton displacement as a function of the fineness coefficient ψ and the Froude number F_0 corresponding to the displacement.

Utilizando las curvas de Doyère para obtener el valor de la resistencia residual, y tomando un valor para la fuerza de arrastre, que se puede calcular aproximadamente, podemos obtener una curva de la resistencia total en función de la velocidad. A continuación se muestra dicha curva (figura 13), procedente de [3], donde la dependencia $W-v$ se muestra para un K-1 con peso distinto para velocidades elevadas, considerando que la propulsión del barco es uniforme.

Comentar finalmente, que los parámetros siguientes son los más importantes para una determinación de la resistencia residual de forma bastante exacta:

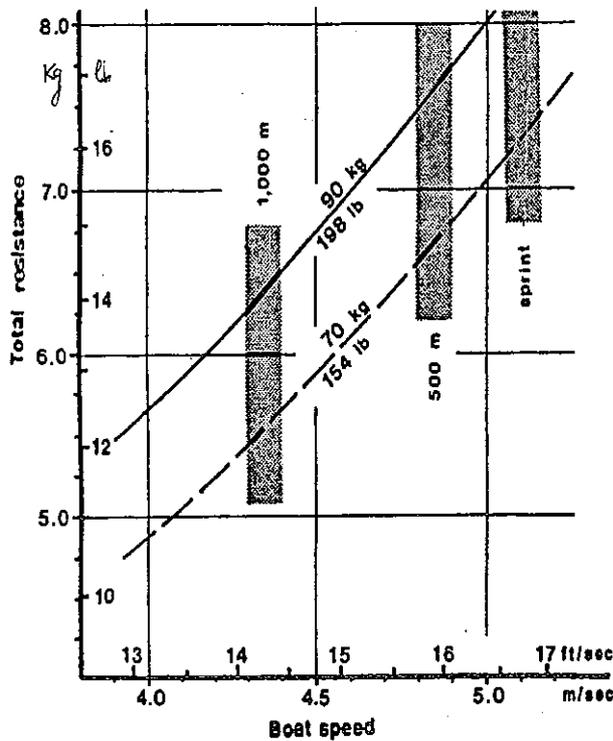


Figure 13 Resistance vs. speed for a K-1, at two different displacements.

$$CP = \frac{D}{LWL \kappa} \quad (32)$$

$$\frac{BWL}{DWL} \quad (33)$$

donde todas las variables son conocidas excepto que representa el área transversal máxima sumergida en el agua, y donde en la primera expresión CP es el ya introducido coeficiente prismático.

PROPULSIÓN

La pala en piragüismo, es el dispositivo de propulsión. Es diferente a cualquier otro sistema normal de impulsión, pues no presenta ningún punto de apoyo en el barco; sólo existe una conexión elástica, el cuerpo del palista, a través de la cual las fuerzas son transmitidas a la embarcación.

Durante una palada, se considera que la hoja de la pala está quieta, aunque realmente tiene lugar un giro de ésta alrededor del eje transversal de la misma, con centro de rotación bastante indefinido. La estacionariedad, surge como consecuencia de que la hoja en el agua es nuestro 'enganche', y por tanto, nuestro punto de apoyo, que determinará el avance de la piragua; máxime cuando la pala no tiene un punto de ligadura al barco. Este punto de apoyo lo

logramos por la presión que en el agua generamos al aplicar una fuerza a la pala. Una vez 'fijada', nuestro objetivo es recorrer la mayor distancia posible hacia delante con nuestra embarcación. Para ello tratamos de transmitir al barco, como más rentablemente podamos, la fuerza aplicada a la pala.

En el transcurso de una palada, desde la entrada hasta la salida del agua, la punta de la hoja realiza un movimiento muy relacionado con la eficacia de su realización, en términos de cómo haya sido la transmisión de la fuerza, de la pala al barco (figura 14).

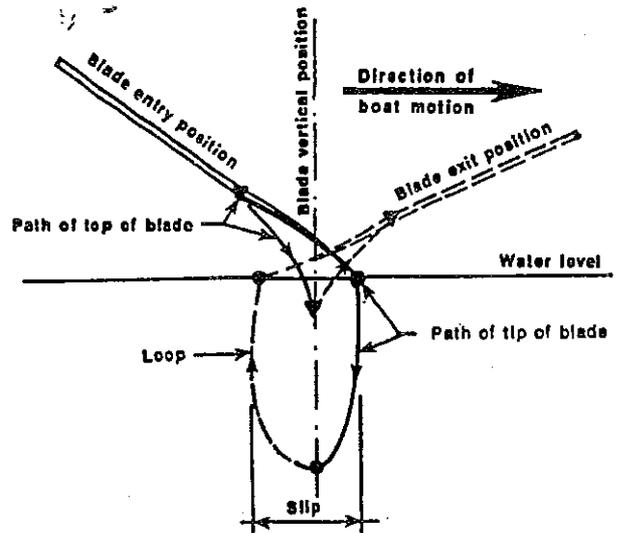


Figure 14 Kayak blade tip pattern in the water during a stroke.

En la fase acuática de la palada (que es la que nos interesa) se distinguen tres etapas: entrada (ataque), tracción y salida del agua. La fase aérea es poco relevante de cara al desplazamiento de la embarcación; no obstante, puede ser interesante comentar, que uno de los motivos por el que las dos hojas de una pala corriente, están giradas una respecto a la otra 90º, es el de reducir la resistencia al aire de la hoja que está moviéndose en este medio, mientras la otra se encuentra en el agua. Este hecho pone de manifiesto, que el aire puede ralentizar un paleo normal. Actualmente hay palas más modernas giradas 70º y hasta 30º en algunos casos, parece ser que por el mayor número de paladas que en la unidad de tiempo se pueden realizar. La resistencia al aire se suple, en estos casos, con diseños muy aerodinámicos.

Próximo Capítulo:

INTRODUCCIÓN A LA HIDRODINÁMICA DEL KAYAK (Continuará)

En cualquier instante de la fase de tracción, la diferencia de presión a ambos lados de la hoja de la pala, puede representarse por la resultante de una fuerza normal al área de hoja sumergida. Esta fuerza, que es la que se transmite a través del cuerpo hacia la embarcación vía asiento y reposapiés, puede descomponerse en tres: una horizontal (F_H), otra vertical (F_V) y la asociada a la dirección transversal (figura 15). La componente horizontal se denomina de propulsión pues es realmente la que produce el movimiento de avance de la embarcación. En realidad no es F_H la que produce el desplazamiento; esta fuerza lo induce, siendo su reacción la que se transmite a través de la conexión elástica entre el barco y el palista. Por otra parte, F_V que es la fuerza vertical que yo aplico a la pala, en un sentido en el ataque y en el contrario a la salida, produce una reacción, que es la que se transmite al barco, produciendo en el ataque una subida de la proa y en la salida un descenso de la popa. En el momento en que la pala forma 90º con la superficie del agua, la fuerza de propulsión coincide con la aplicada (salvo componente transversal), lográndose el máximo rendimiento. Mantener este máximo el mayor tiempo posible es uno de los objetivos técnicos del palista. La componente transversal, su reacción, es la que origina los movimientos de giro a derecha e izquierda. Cuando el objetivo fundamental es el desplazamiento longitudinal, esta fuerza se ve compensada, si la técnica es buena, pues se aplica sucesivamente a ambos lados de la embarcación. Si lo que queremos es virar, bastará con remar a un solo lado del kayak varias veces, haciendo el giro mas efectivo si inclinamos el remo, alejándolo del barco.

En este punto conviene hablar un poco del trabajo que realiza el palista sobre el remo, así como de la potencia que el sistema genera. El momento de la fuerza horizontal es:

$$M = F_H s \quad (34)$$

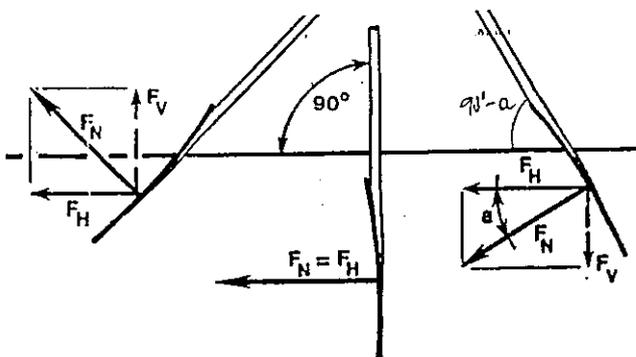


Figure 15 Relationship of forces on the blade during a stroke.

donde s es la distancia entre el punto de aplicación de la fuerza en el remo y el lugar de la hoja de la pala donde puede considerarse que actúa. Es una longitud difícil de determinar por la dificultad que supone

encontrar ambos puntos. El trabajo útil que se realiza sobre el barco produciendo su deslizamiento será:

$$E = F_H \frac{v}{\omega} \quad (35)$$

y la potencia:

$$P = F_H d \omega \quad (36)$$

con la frecuencia angular de rotación del remo y d la distancia que el barco se desplaza.

Estas expresiones dan buenos resultados ([3]) pese a que estén basadas en una rotación pura uniforme, que realmente no es ya que la pala se desplaza ligeramente en el agua y la propulsión se realiza a impulsos.

Analicemos ahora la acción de la pala desde el punto de vista de las palancas. Habremos de considerar los movimientos que con respecto al barco realizan la pala y las manos, así como los puntos de aplicación de las fuerza a la pala durante la palada.

En la figura 16, podemos ver las posiciones de las manos y su relación durante la tracción y la impulsión:

- * El punto 1, momento de la entrada en el agua.
- * El punto 2, momento de entrada total de la pala en el agua.
- * El punto 3, momento de comienzo de la salida de la pala del agua.
- * El punto 4, momento de la salida total de la pala del agua.

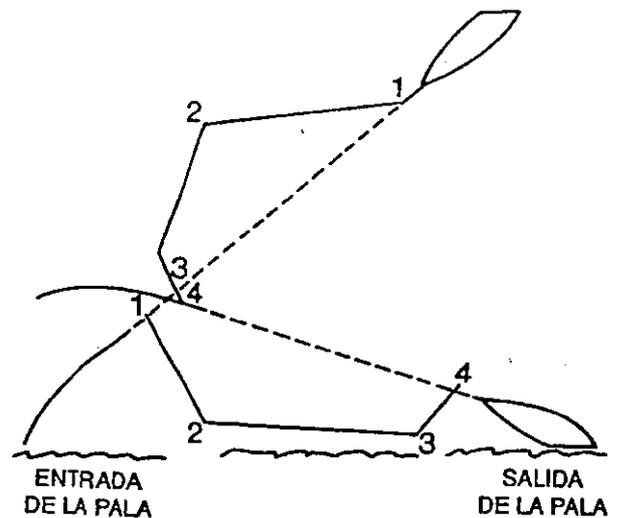


FIG. 16

En el recorrido de los puntos 1 al 2, existe un mayor desplazamiento de la mano de arriba, lo que hace que el punto de rotación de la pala se encuentre bajo, muy próximo a la mano de tracción (figura 17). En este momento, la mano de arriba, o de empuje, actúa

como la potencia de una palanca, mientras que la mano de abajo, o de tracción, actúa como la resistencia de esa palanca.

En el recorrido de los puntos 2 al 3, existe un menor desplazamiento de la mano de arriba, frente a un desplazamiento mayor de la mano de abajo. Esto hace que el punto de giro de la pala suba hasta acercarse a la mano de arriba o pasando por encima en el recorrido entre los puntos 3 y 4 (figura 18). En esta situación, al contrario del recorrido entre los puntos 1 y 2, la mano de empuje actúa como resistencia y la mano de tracción como potencia de la palanca.

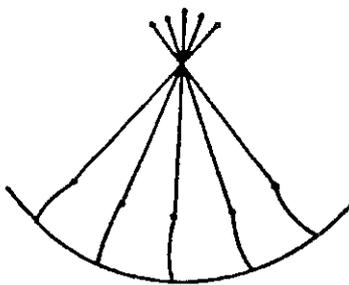


FIG. 18

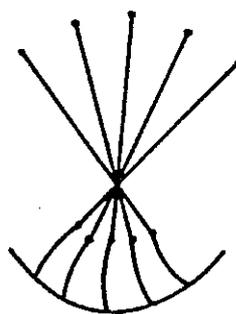


FIG. 17

La acción de la pala es, pues, una acción progresiva, donde se produce un cambio en la función de potencia y resistencia de los brazos, dependiendo del punto de giro de la pala y de la búsqueda de una mejor posición en el agua.

Por lo visto en las figuras 17 y 18, la situación del punto de giro, muy próximo a la mano de tracción durante la fase de introducción de la pala, permite que esta fase de búsqueda de una mejor posición de la pala, se realice con un menor recorrido acuático. Una vez lograda la introducción de la pala, interesa mantener un punto de giro en la pala bastante más alto, logrando, de esta manera, una fase acuática más larga en distancia, con un mejor posicionamiento de la pala en el agua.

El flujo que se desarrolla en torno a la pala no está demasiado claro, aunque parece ser que hay bastante evidencia de que son dos, los que fundamentalmente se desarrollan debido al movimiento de la pala en el agua: flujo de cavidad y de vórtice (figura 19).

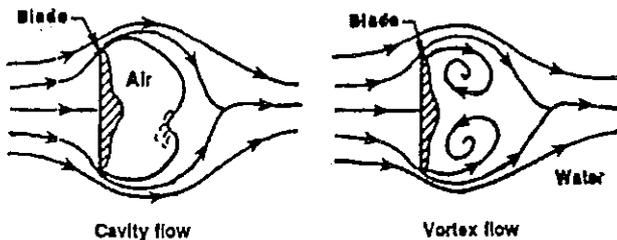


Figure 19 Flow around paddle blade (top view).

El flujo de cavidad consiste en una burbuja de aire o vapor de agua, que se genera detrás de la pala, a velocidades elevadas de ésta. Se desarrolla normalmente en competiciones durante las primeras paladas, con las que se pretende acelerar el barco. Este tipo de flujo indica, en general, una aplicación excesiva de fuerza y produce un desplazamiento de la pala en el agua, reduciéndose la efectividad de la palada, de cara al desplazamiento de la embarcación. La distribución de presión en la cavidad es no uniforme, lo que origina el colapso de la burbuja y el cambio hacia el flujo de vórtice. Este flujo se encuentra en régimen turbulento y es parecido al que se genera por una placa plana orientada en sentido vertical al flujo, el cual analizamos a continuación, no sin antes hacer notar, que realmente, una pala corriente es esencialmente una placa plana, que durante la fase de tracción está totalmente sumergida y que se encuentra perpendicularmente orientada al sentido del movimiento.

Entonces, la fuerza de arrastre, se determinará por:

$$F_a \int_S p dS \quad (37)$$

Para una geometría dada, el flujo se separa a partir de los bordes de la placa; hay flujo de regreso en la estela de baja energía (figura 20). A pesar de que la presión sobre la superficie posterior de la placa es esencialmente constante (si la velocidad lo es), su magnitud no puede determinarse analíticamente.

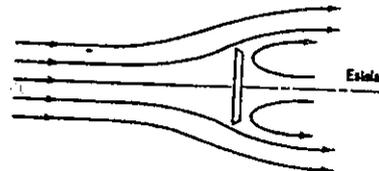


Fig. 20 Flujo sobre una placa plana normal al flujo.

El coeficiente de arrastre suele basarse en el área frontal del objeto, y para un número de Reynolds (en función de la altura) aproximadamente mayor que 103, se puede obtener de la figura 21, en términos de la proporción dimensional de la placa, b/h.

Conviene hacer notar el parecido entre las figuras 19 y 20, lo que soporta el cálculo siguiente, en el que obtenemos el coeficiente de arrastre para la pala como si de una placa plana se tratase.

Veamos ahora (cualitativamente) el motivo de la aparición e implantación definitiva de las palas modelo Wing o Rasmussen. Esta claro que con una pala corriente, aproximadamente recta si la observamos desde arriba, al introducirla en el agua y al aplicar sobre ella una fuerza, inducimos una diferencia de presión a ambos lados; mayor en el lado anterior y menor en el posterior. Pues bien, en las palas más modernas, el diseño es tal que se potencia esa dife-

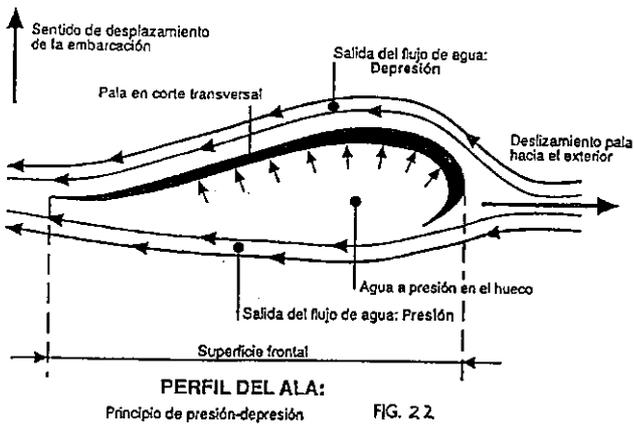
rencia de presión, haciendo que el agua deslice muy rápidamente hacia la embarcación en su cara posterior, lo que se invierte en una reducción de la presión, que origina que se transmita una mayor fuerza a la embarcación. Además, en la cara anterior la cantidad de agua que empuja a la pala es mayor, lo que de nuevo se invierte en incrementar la diferencia de presión (figura 22).

Para concluir, vamos a hacer uso del análisis dimensional (muy descriptivamente), para abordar el estudio de la bondad del sistema de propulsión.

Se definen el coeficiente de propulsión, η , y el cociente de avance por propulsión, cap , como sigue:

$$\eta = \frac{Wv}{P} \quad (38)$$

$$cap = \frac{v}{nl} \quad (39)$$



donde n es el número de revoluciones por unidad de tiempo de la pala para que la embarcación se desplace a velocidad v . P es la potencia comunicada al remo, W la resistencia total sin dispositivo de propulsión y l es el diámetro de dicho dispositivo (el diámetro del remo en nuestro caso).

va a caracterizar la bondad del diseño del barco, la eficacia del sistema de propulsión y su modo de operación, en función de su interacción con la embarcación. Un mayor valor de este coeficiente indica que el sistema barco-palista-remo es tanto mejor. El coeficiente de propulsión para barcos con geometría dada, con un coeficiente fijo y considerando una misma localización relativa barco-palista-remo, para un valor l/L constante, será función del número de Reynolds y del de Froude, o bien función del número de Reynolds y del cociente de avance por propulsión.

Si las características geométricas del sistema de propulsión y de la embarcación cambian, el valor de se hace dependiente de ellos, lo que se pone de manifiesto en las variaciones de la resistencia que el fluido ofrece tanto al barco como al remo. Pueden también

aparecer situaciones en las que el valor η de varíe en base a la forma de interacción entre el sistema de propulsión y el barco. Para el caso del piragüismo las variaciones en las geometrías del remo y del barco, así como la posición del palista en la embarcación y por tanto, la posición del remo respecto a ésta cambian, buscándose con estudios mas teóricos y avanzados la mejor geometría general que haga que el coeficiente de propulsión sea máximo.

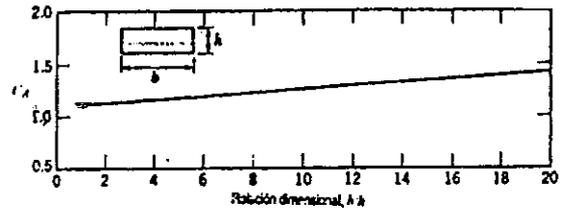


Fig. 2.1 Variación del coeficiente de arrastre con la relación dimensional para una placa plana de ancho finito normal al flujo con $Re_b > 1000$ [14].

APÉNDICE 1

Pretendemos encontrar un valor aproximado para la altura metacéntrica del sistema barco-palista. Para ello debemos conocer la posición del centro de gravedad y del centro de flotación del sistema.

Aproximaremos la parte sumergida de un K-1 (éste será nuestro barco) a la parte inferior de un elipsoide de semiejes a , b y c . El piragüista será un conjunto de dos prismas de base rectangular, uno para el cuerpo y otro para las piernas.

Referiremos nuestros cálculos al sistema de referencia habitual, asociando al plano del agua, el plano XY, coincidiendo el eje X con la dirección longitudinal del kayak, y el eje Y con la transversal; el eje Z será perpendicular al plano del agua. El centro estará en el plano del agua justo donde situemos al palista (figuras 1.1-1.3).

El sistema sobre el que vamos a realizar los cálculo se esquematiza en la siguiente figura:

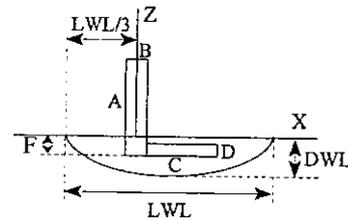


Figura 1.1

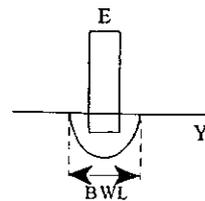


Figura 1.2

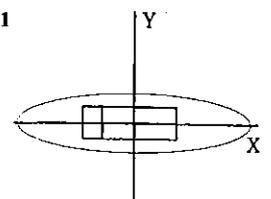


Figura 1.3

Valores numéricos:

- LWL = 5.2 m = 2a
- DWL = 0.13 m = c
- B = 0.15 m
- D = 0.10 m
- F = 0.10 m
- M (total) = 77 Kg
- M (hombre) = 65 Kg
- M (tronco) = 40 Kg
- M (piernas) = 25 Kg
- BWL = 0.38 m = 2b
- A = 0.65 m
- C = 0.90 m
- E = 0.50 m

Para el cálculo del c.g. consideraremos sólo al palista. Esto tiene su justificación si observamos la tabla 2, en la que vemos que el palista en un K-1 abarca el 83% del peso total del sistema. Además el kayak, se distribuye de igual forma a ambos lados del plano XZ. La influencia del kayak sobre el c.g. vendrá en desplazar éste un "poquito" en la dirección X. Este efecto es el que despreciamos.

La densidad del piragüista la tomamos constante a lo largo de su cuerpo.

Por la geometría del problema, el c.g. estará contenido en el plano XZ, por tanto, $y_{c.g.} = 0$.

$$\chi_{c.g.} = \frac{M_r \frac{B}{2} + M_p \left(B + \frac{C}{2} \right)}{M_h} = 0.277 \text{ m} \quad (1)$$

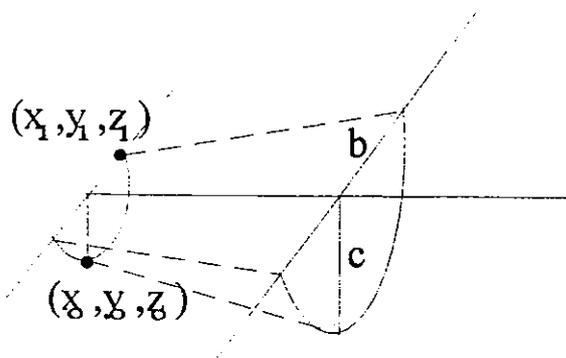
$$\chi_{c.g.} = 0.202 \text{ m} \quad (2)$$

$$z_{c.g.} = 0.12 \text{ m} \quad (3)$$

Entonces:

$$c.g. = (0.202 \text{ m}, 0, 0.12 \text{ m}) \quad (4)$$

Para calcular el centro de flotación, hemos de calcular el centroide del área transversal del kayak (área ZY) sumergida en el agua. La forma de esta superficie es una elipse en el plano ZY, de semiejes b' y c' que obtendremos de los correspondientes del elipsoide a, b y c (figura 1.4).



$$c' = z_0$$

$$b' = y_1$$

$$\chi_o = \frac{LWL}{2} - \frac{LWL}{3} = 0.867 \text{ m}$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1 \Rightarrow c' = 0.123 \text{ m} \quad (4)$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b' = 0.179 \text{ m} \quad (5)$$

Consideramos que el c.g. y el c.f. sólo se diferencian en una determinada altura, con lo que $x_{c.f.} = x_{c.g.}$. Esto no es del todo correcto, aunque puede considerarse así, pues nunca se plantea la estabilidad longitudinal, asumiendo que ambos puntos están en el mismo plano ZY, en la misma vertical si el equilibrio es estable. Esto último también se considera para el cálculo.

La ecuación de la elipse cuyo centroide queremos calcular es:
(En realidad solo calculamos el centroide de la parte de abajo de esta elipse.)

$$\frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1 \quad (6)$$

entonces:

$$x_{c.f.} = x_{c.g.}$$

$$y_{c.f.} = 0$$

$$|z_{c.f.}| = \frac{1}{\pi b' c'} \int_{-b'}^{b'} z z dy = [uso(6)] = \frac{2}{\pi b' c'} \int_0^{b'} \left(1 - \frac{y^2}{b'^2} \right) c'^2 dy =$$

$$= \frac{2c'}{\pi b'} \left[b' - \frac{1}{b^2} \frac{b'^3}{3} \right] = \frac{2c'}{\pi b'} \frac{2}{3} b' = 0.0522 \text{ m}$$

En consecuencia:

$$c.f. = (0.202 \text{ m}, 0, -0.0522 \text{ m})$$

Ya conocemos la distancia del centro de gravedad al centro de flotación, que resulta ser igual a:

$$\overline{GB} = 17.22 \text{ cm}$$

Próximo Capítulo:

INTRODUCCIÓN A LA HIDRODINÁMICA DEL KAYAK (Continuará)

Para conocer el metacentro, hemos de calcular el momento de inercia por unidad de masa del área de agua que corta al kayak, respecto al eje longitudinal. Recordemos que hemos considerado que el sistema se encuentra en equilibrio y por tanto, ese área será una elipse de semiejes a y b .

$$I = \int_A y^2 2x dy = \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right] =$$

$$= \int_{-b}^b 2y^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} a dy = \left[\frac{y^2}{b^2} = v^2 \right] = 4a \int_0^b b^2 v^2 \frac{(1-v^2)}{\frac{1}{2}} b dv =$$

$$= 4a b^3 \left[-\frac{v(1-v^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{v\sqrt{1-v^2}}{8} + \frac{1}{8} \arcsen v \right] = 4a b^3 \frac{\pi}{16}$$

$$I = 0.014 m^4$$

El volumen de fluido desalojado es:

$$D = \frac{4}{3} \frac{\pi a b c d}{2} = 0.1345 m^3$$

y por tanto:

$$\overline{MG} = \frac{I}{D} - \overline{GB} = -6.806 cm$$

APÉNDICE 2

2.1 Introducción

Muchos flujos viscosos pueden analizarse dividiéndolo en dos regiones, una cercana a las fronteras sólidas y la otra cubriendo el resto del flujo. Sólo en la región adyacente a una frontera sólida, lo que se conoce como capa límite, el efecto de la viscosidad es importante. En la región exterior a esta capa, este efecto es despreciable y el fluido puede tratarse como si estuviese en régimen de flujo potencial. En la capa límite, tanto las fuerzas viscosas como las de inercia son importantes. En consecuencia, el número de Reynolds (R) será significativo a la hora de caracterizar los flujos que en ella tienen lugar. La longitud típica que se emplea en la expresión de R es, en algunos casos, la longitud en la dirección del flujo en la cual se ha desarrollado la capa límite o bien, alguna medida del espesor de ésta.

Inicialmente el flujo del que venimos hablando está en régimen laminar, produciéndose a cierta distancia del punto de estancamiento, la transición a régimen turbulento. Este cambio en la forma de distribución del fluido entorno al sólido, depende de las condicio-

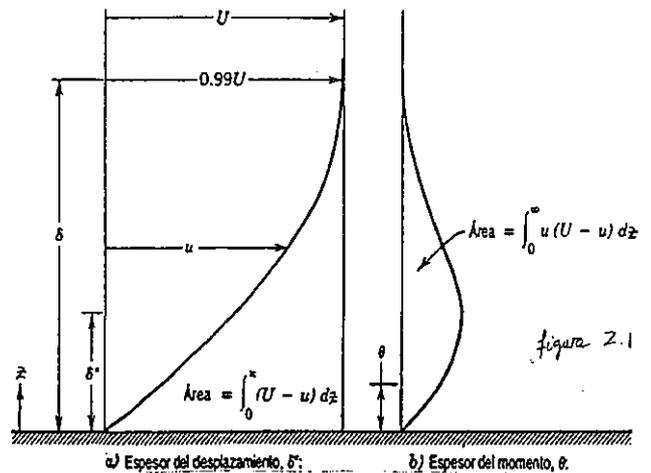
nes de la corriente libre, de la rugosidad de la superficie, del gradiente de presión, de las fuerzas másicas y de la transferencia de calor.

En muchas situaciones reales, se desarrolla una capa límite sobre una superficie larga y esencialmente plana. Este es, por ejemplo, el caso de la piragua, cuyos rasgos básicos pueden ilustrarse a partir del caso más simple posible que se considera: el flujo sobre una placa plana.

Antes de estudiar cómo es la capa límite alrededor de una placa plana, conviene definir algunos conceptos que nos serán de utilidad a la hora de describir la mencionada región.

2.2 Espesor de la capa límite

En primer lugar conviene dejar clara la geometría del problema. Para ello nos remitimos a la figura 2.1. En ella puede verse que el eje Z es perpendicular a la superficie sólida y que el eje X es paralelo a ella; U es la velocidad constante del flujo suficientemente lejos de la capa límite y u lo será en el interior de ésta; es una dimensión característica del sólido en la dirección perpendicular al plano del papel (dirección Y). Como vemos estamos considerando que el fluido incide sobre la placa plana, que está en reposo, y por tanto lo frena. En nuestro caso ocurre lo contrario; el fluido está quieto, y debido al movimiento de la placa se mueve en las proximidades de ésta, permaneciendo en reposo suficientemente lejos de ella. Ambos problemas son análogos y en este apéndice abordaremos el primero.



Se define el espesor de perturbación de la capa límite, θ , como la distancia de la superficie sólida al punto donde la velocidad del fluido está dentro del 1% de la velocidad de la corriente libre.

En la práctica resulta difícil trabajar con por lo que se define el espesor de desplazamiento que ahonda en el efecto que físicamente tienen las fuerzas viscosas sobre el sólido. Fundamentalmente, las fuerzas de viscosidad lo que hacen es retardar el flujo en la capa

límite, de manera que, la relación de flujo de masa adyacente a una superficie sólida es menor que la relación de flujo másico que pasaría por la misma región en ausencia de una capa límite. Pues bien, el espesor de desplazamiento, δ^* , es la distancia que la frontera sólida tendría que desplazarse en un flujo sin fricción para producir el mismo déficit de flujo másico que origina la presencia de la capa límite. Entonces (figura 2.1):

$$\rho U \delta^* \varpi = \int_0^{\infty} \rho (U - u) \varpi dz \quad (2.1)$$

de donde, si ρ es constante:

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz \approx \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz \quad (2.2)$$

El retardo del flujo dentro de la capa límite origina también una reducción en el flujo de momento. El espesor de momento, θ , se define como el espesor de una capa de fluido, de velocidad U , para la cual, el flujo de momento es igual al déficit de flujo de momento a través de la capa límite, es decir, es la distancia que deberíamos desplazar la superficie sólida para producir la reducción en el flujo de momento que realmente produce la existencia de una capa límite.

Por lo tanto (figura 2.1):

$$\rho U^2 \theta \varpi = \int_0^{\infty} \rho u (U - u) \varpi dz \quad (2.3)$$

de donde, y para fluidos incompresibles:

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz \approx \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz \quad (2.4)$$

La evaluación de δ^* y θ se hace con precisión a partir de datos experimentales.

2.3 Ecuación integral de momento

Pretendemos en este apartado dar a conocer una ecuación (cuya obtención puede verse en [1]), que nos permita predecir, al menos aproximadamente, la manera en la cual la capa límite crece como función de la distancia a lo largo del cuerpo. Esta expresión será aplicable tanto a flujos en régimen laminar como turbulento, bajo las suposiciones siguientes:

- * Flujo estable.
- * Flujo bidimensional.
- * Flujo incompresible.
- * Sin fuerzas de cuerpo en la dirección paralela a la superficie sólida.
- * Despreciamos las variaciones de presión en la dirección perpendicular a la superficie sólida. La

correspondiente a la dirección paralela la determinamos aplicando Bernuilli al flujo no viscoso fuera de la capa límite.

Con todo lo anterior, podríamos llegar a la siguiente expresión:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} (U^2 \theta) + \delta^* U \frac{dU}{dx} \quad (2.5)$$

que es esencialmente la ecuación integral de momento. En ella τ_w representa el esfuerzo de corte (fuerza por unidad de área) sobre la pared sólida.

Con el propósito de emplear esta ecuación para estimar el espesor de la capa límite como una función de x , debemos:

1. Obtener una primera aproximación para la distribución de velocidad, $U(x)$. Esta se determina a partir de la teoría de flujo no viscoso (la velocidad que existiría en ausencia de una capa límite). La presión en la capa límite se relaciona con la velocidad de corriente libre, U , empleando la ecuación de Bernuilli.
2. Suponer una forma razonable del perfil de velocidades dentro de la capa límite.
3. Relacionar el esfuerzo de corte de pared con el campo de velocidades.

2.4 Algunos resultados derivados de la aplicación de la ecuación integral del momento a flujos sobre una placa plana de gradiente de presión cero.

En primer lugar se supone una distribución de velocidad en la capa límite cuya relación funcional es de la forma:

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (2.6)$$

Esta distribución debe satisfacer las siguientes condiciones de frontera:

$$u = 0 \text{ en } z = 0.$$

$$u = U \text{ en } z = \delta.$$

$$\frac{u}{U} = 0 \text{ en } z =$$

Además deberemos obtener una expresión de τ_w en función de δ .

En la tabla siguiente tabla 2.1, se muestran los resultados del cálculo del flujo de capa límite laminar sobre una placa plana a incidencia cero, basados en perfiles de velocidad aproximados (para más detalle ver [1]):

Tabla 2.1 Resultado del cálculo del flujo de capa límite laminar sobre una placa plana a incidencia basados en perfiles de velocidad aproximados.

Distribución de Velocidad

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = f(\eta) \quad \frac{\theta}{\delta} = \frac{\delta^*}{\delta} \quad h = \frac{\delta^*}{\theta} \quad A = \frac{\delta}{x} \sqrt{Re_x} \quad b = C_f \sqrt{Re_x}$$

$f(\eta) = \eta$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	3.00	3.46	0.577
$f(\eta) = 2\eta - \eta^2$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	2.50	5.48	0.730
$f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$	$\frac{39}{280}$	$\frac{3}{8}$	2.69	4.64	0.647
$f(\eta) = 2\eta - \eta^3 + \eta^4$	$\frac{37}{315}$	$\frac{3}{10}$	2.55	5.84	0.685
$f(\eta) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$	$\frac{4-\pi}{2\pi}$	$\frac{\pi-2}{\pi}$	2.66	4.80	0.654
<i>Exacta</i>	--	--	2.59	5.0	0.664

En ella, todas las variables son conocidas, excepto C_f , que es el coeficiente de esfuerzo de corte en la pared, o de fricción superficial, y que se define como sigue:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (2.7)$$

En el caso de una capa límite con flujo en régimen turbulento para la placa plana lisa, la ley de velocidades que suele emplearse es empírica, de la forma:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \quad (2.8)$$

Sin embargo, este perfil no se mantiene en la vecindad inmediata de la pared, puesto que en ésta, predice que,

$$\frac{du}{dz} \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

Deberemos pues, adoptar otra expresión para τ_w en términos de δ , no pudiendo hacer esto a partir del perfil de velocidades. Tomamos para el esfuerzo de corte la expresión siguiente:

$$\tau_w = 0.0233 \rho u^2 \frac{\left(\frac{v}{u\delta}\right)}{\frac{1}{4}} \quad (2.10)$$

que viene de una expresión que se usa al parecer ([1]) para flujos en tuberías. En ella es la viscosidad cinemática del fluido definida como el cociente entre su viscosidad y su densidad.

De esta forma y haciendo uso de la ecuación integral del momento, se puede obtener:

$$\frac{\delta}{x} = 0.382 \frac{1}{R(x)^{\frac{1}{5}}} \quad (2.11)$$

$$C_f = \frac{0.0594}{R(x)^{\frac{1}{5}}} \quad (2.12)$$

Esta última expresión predice bastante bien la fricción superficial turbulenta sobre una placa plana para números de Reynolds comprendidos entre $5 \cdot 10^5$ y 10^7 .

El empleo de la ecuación integral del momento es una técnica aproximada para predecir el desarrollo de la capa límite; se predicen las tendencias obtenidas correctamente, siendo la concordancia entre teoría y experiencia razonablemente buena.

No se ha realizado aquí un tratamiento específico en la obtención de los resultados por no ser ese el objetivo del apartado. Un desarrollo más exhaustivo puede verse en el libro del que se han sacado las conclusiones aquí expuestas ([1]).

2.5 Algunas consideraciones del flujo sobre una placa plana bajo gradientes de presión no nulos.

Para una placa plana finita sin gradiente de presión a lo largo de su capa límite, nunca podrá darse la condición siguiente:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \quad (2.13)$$

que expresa que la capa de fluido en la vecindad de una superficie sólida puede llevarse a velocidad nula.

En el caso de que existan gradientes de presión en la capa límite, la condición anterior podrá ser satisfecha, denominándose el punto de la superficie sólida en el que se cumple, punto de separación.

El gradiente de presión será adverso si ésta aumenta en la dirección del flujo, y será favorable en caso contrario. El que,

$$\frac{\partial p}{\partial x} > 0 \text{ (gradiente de presión adverso)} \quad (2.14)$$

es una condición necesaria para que la separación se produzca, pero no suficiente. En caso de que se pro-

dujese, llevaría consigo un movimiento del fluido de baja energía (fluido próximo a la superficie sólida) en sentido contrario al del fluido (figura 2.2).

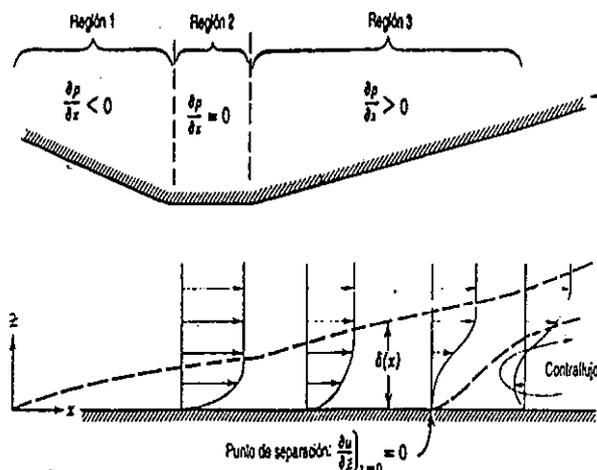


Fig. 2.2 Flujo de capa límite con gradiente de presión (el espesor de la capa límite se ha exagerado para mayor claridad).

APÉNDICE 3

3.1 Introducción

A pesar del conocimiento que se tiene desde principios del siglo XIX de las ecuaciones de movimiento para un fluido Newtoniano, es complicado (imposible en algunos casos) obtener una solución analítica de ellas.

Una de las formas más potentes para atacar problemas en Física de Fluidos consiste en utilizar ecuaciones que relacionan una situación (modelo) con otra (prototipo), de manera que el comportamiento de una, pueda utilizarse para predecir el comportamiento de la otra. La herramienta fundamental para la interpretación de los resultados de un modelo y su relación con los resultados para el prototipo, es el análisis dimensional.

3.2 El teorema π

Toma su base bajo la consideración de que en cualquier proceso físico, existe una relación funcional entre las variables que intervienen, que puede escribirse de la forma siguiente:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (3.1)$$

La última ecuación debe ser dimensionalmente homogénea y por tanto debe haber una transformación de unidades tal que:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (3.2)$$

donde las x_i' corresponden a las x_i pero en otro sistema de unidades.

Esa transformación se realiza mediante unos factores de conversión P_i para cada unidad fundamental. Entonces:

$$x_i' = x_i P_1^{a_{1i}} P_2^{a_{2i}} \dots P_m^{a_{mi}} \quad (3.3)$$

com m el número de magnitudes fundamentales dentro de las variables x_i y con a_{ji} los exponentes de las correspondientes unidades (j hace referencia a la unidad fundamental; i lo hace a la variable correspondiente).

Aún más genéricamente:

$$(X_1)^k = X_i^k P_1^{k a_{1i}} P_2^{k a_{2i}} \dots P_m^{k a_{mi}} \quad (3.4)$$

El producto,

$$k_1 (x_1)^{k_1} \dots (x_n)^{k_n} = x_1^{k_1} P_1^{k_1 a_{11}} \dots P_m^{k_1 a_{m1}} \dots x_n^{k_n} P_1^{k_n a_{1n}} \dots P_m^{k_n a_{mn}} \quad (3.5)$$

será adimensional si se cumple:

$$(a_{ji})_{m \times n} (k_i)_{n \times 1} = (0)_{m \times 1} \quad (3.6)$$

En consecuencia, un producto de variables puede hacerse adimensional escogiendo los k_i que satisfagan (3.6).

De lo que se trata es de encontrar el máximo número de productos adimensionales independientes, π_i , formados de las variables x_j . Entonces (3.1) será equivalente a:

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p) = 0 \quad (3.7)$$

siendo $p = n - \text{rango}(a_{ji})$.

Al pasar de (3.1) a (3.7) se ha producido una reducción en el número de variables que intervienen en el problema, lo cual es de gran interés en una infinidad de problemas.

Próximo Capítulo:

INTRODUCCIÓN A LA HIDRODINÁMICA DEL KAYAK (Continuará)

3.3 Similitud

Desde el punto de vista de la mecánica de fluidos, un modelo se comportará como su prototipo si las ecuaciones de movimiento y las condiciones de frontera que se aplican al prototipo, se transforman, bajo condiciones adecuadas de longitud, tiempo y masa, a las ecuaciones y condiciones que se aplican al modelo.

Estas transformaciones pueden escribirse:

$$x'_i = x_i \frac{L_m}{L_p}; t' = t \frac{T_m}{T_p}; m' = m \frac{M_m}{M_p} \quad (3.8)$$

en donde las primas se refieren al modelo y las razones son factores de escala de longitud, tiempo y masa respectivamente.

Pues bien, en lugar de transformar las ecuaciones en cada caso concreto, éstas suelen escribirse en forma adimensional, de manera que sean válidas bajo cualquier cambio de escala.

Las variables adimensionales se definen como:

$$x'_i = \frac{x_i}{L_o}; v'_i = \frac{v_i}{v_o}; t^* = \frac{u_o t}{L_o} \quad (3.9)$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_o}; p^* = \frac{p}{P_o}; \phi^* = \frac{\phi}{L_o}$$

donde, L_o, v_o, ρ_o, P_o son constantes de referencia dimensionales, características del sistema de flujo. Indicar que estamos considerando sólo las fuerzas de cuerpo gravitatorias que suponemos derivan de un potencial conservativo que hemos notado como ϕ .

Bajo estas transformaciones las ecuaciones de continuidad y de movimiento pueden escribirse:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* v^*_i) = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial v^*_i}{\partial t^*} = -\frac{gL_o}{v_o^2} \rho^* \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*_i} - \frac{P_o}{\rho_o v_o^2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*_i} + \frac{\eta}{\rho_o v_o L_o} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x^*_i} \frac{\partial v^*_j}{\partial x^*_j} + \frac{\partial^2 v^*_i}{\partial x^*_j \partial x^*_j} \right] \quad (3.11)$$

La condición de no deslizamiento se mantiene bajo cualquier transformación de escala, al igual que cualquier condición impuesta en el infinito.

En el caso de flujo no estacionario, deberá asumirse que la historia del modelo y el prototipo son la misma.

Como vemos, (3.10) es aplicable a modelo y prototipo bajo cualquier transformación. En (3.11) aparecen unas cantidades adimensionales,

$$F = \frac{v_o}{\sqrt{gL_o}}; C_p = \frac{P_o}{\frac{1}{2} \rho_o v_o^2}; R = \frac{\rho_o v_o L_o}{\eta} \quad (3.12)$$

F es el número de Froude, C_p es el coeficiente de presión y R el número de Reynolds.

El primero es una medida relativa del cociente entre el término inercial y los gravitatorios. El segundo lo es para el término de presión y el inercial y el tercero expresa la importancia relativa de el término inercial y el viscoso.

Diremos que el modelo y el prototipo son dinámicamente similares si:

$$(F)_p = (F)_m; (C_p)_p = (C_p)_m; (R)_p = (R)_m \quad (3.13)$$

La similitud completa entre modelo y prototipo es difícil de conseguir, apareciendo lo que se conoce como similitud incompleta, que se aplica cuando todas las igualdades en (3.13) no ocurren. Esto en muchas ocasiones es suficiente, para abordar un problema, modelizándose el fenómeno de interés y olvidando aquellos aspectos que no tienen importancia y que no son similares en modelo y prototipo. Ambos son dinámicamente similares en algunas cosas, y no lo son, en otras.

Otro concepto importante con el que conviene estar familiarizado, es el de similitud aproximada, que aparece cuando ni siquiera podemos situarnos en condiciones de similitud incompleta. Se abandona la idea de modelizar exactamente y el modelo se construye con el fin de obtener los mejores resultados aproximados posibles.

Por ejemplo, si el modelo y el prototipo tienen la misma densidad y viscosidad, podemos buscar que los números de Reynolds sean iguales, o que lo sean los números de Froude, pero nunca podrán serlo ambos (ver expresión 3.13) salvo en el caso trivial en que $(L_o)_p = (L_o)_m$.

El problema es suficientemente complejo como para estar en condiciones de similitud incompleta, y por tanto, se trata de encontrar una buena aproximación para que los resultados que se obtengan sean los mejores posibles.

3.4 Modelizado de Froude

Para flujos con una superficie libre, el criterio de Froude permanece importante de cara a una buena similitud entre modelo y prototipo. La condición de superficie libre se toma usualmente como:

$$p = p_a$$

donde P_a es la presión atmosférica (o cualquier otra presión impuesta sobre la superficie libre).

La elección para la presión adimensional en este caso es:

$$p^* = \frac{p - p_a}{\rho_o v_o^2} \quad (3.14)$$

que genera que se cumpla el criterio siguiente para estar en condiciones de similitud incompleta:

$$(F)_p = (F)_m; (\psi)_p = (\psi)_m \quad (3.15)$$

APÉNDICE 4

	<u>LWL</u>	<u>D</u>	<u>g</u>	<u>ρ</u>	<u>η</u>	<u>v</u>
M	0	0	0	1	1	0
L	1	3	1	-3	-1	1
T	0	0	-2	0	-1	-1

$$(a_{ji}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango (a_{ji}) = 3

Número de monomios adimensionales = 6 - 3 = 3

Busco k_i (con i = 1,.....,6) tales que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$\begin{aligned} k_4 + k_5 &= 0 \\ k_1 + 3k_2 + k_3 - 3k_4 - k_5 + k_6 &= 0 \\ -2k_3 - k_5 - k_6 &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos un sistema compatible indeterminado que pasamos a resolver:

* Primera elección: k₄ = 0 = k₆; k₁ = 1

Entonces: k₅ = 0 = k₃; k₂ = -1/3

* Segunda elección: k₂ = 0 = k₄; k₆ = 1

Entonces: k₅ = 0; k₃ = -1/2; k₁ = -1/2

* Tercera elección: k₂ = 0 = k₃; k₅ = -1

Entonces: k₄ = 1; k₆ = 1 = k₁

Los monomios obtenidos con las elecciones realizadas son:

$$\pi_1 = \frac{LWL}{D^{\frac{1}{3}}}; \pi_2 = \frac{v}{\sqrt{g LWL}}; \pi_3 = \frac{LWL \rho v}{\eta}$$

como se presenta en el trabajo. Cualquier otro monomio π que se obtenga podrá ponerse como combinación lineal de estos tres, que es lo que hacemos con la expresión adimensional en el que aparece la resistencia total.

BIBLIOGRAFÍA

- 1) "Introducción a la física de fluidos", Robert W. Fox, Alan McDonald, McGraw-Hill 1992.
- 2) "Piragüismo", Federación Española de Piragüismo y Comité Olímpico Español, 1993.
- 3) "Canoeing: an Olympic Sport", Andy Toro.
- 4) "Fluid Mechanics", James E. Liggett, McGraw-Hill, 1994.
- 5) "Similarity and dimensional methods in mechanics", L. I. Sedov, Infosearch Ltd. (Londres), 1959.
- 6) "Handbook of Chemistry and Physics", David R. Lide (editor), 76th edition, CRC-Press, 1995-1996.
- 7) "Mecánica de los fluidos", Victor L. Streeter, E. Benjamin Wylie, McGraw-Hill 1988.